

ESERCIZI DI MATEMATICA

1. È dato il fascio di circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 + 2kx + (1 - k)y + 2 = 0$$

dove k è un parametro reale.

- trovare l'equazione della retta cui appartengono i centri delle circonferenze;
 - trovare per quali valori di k non esiste una circonferenza reale nel fascio;
 - trovare le coordinate dei punti limite del fascio;
 - trovare la parte della retta dei centri i cui punti sono effettivamente centri di circonferenze del fascio;
 - trovare l'equazione dell'asse radicale;
 - sia Q il punto dell'asse radicale di ascissa 1 e siano \mathcal{C}_{-2} e \mathcal{C}_2 le circonferenze del fascio corrispondenti ai valori $k = -2$ e $k = 2$. Verificare che la potenza di Q rispetto a queste due circonferenze è la stessa;
 - visualizzare il fascio di circonferenze con Geogebra.
2. Date le circonferenze \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 di equazioni $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ e $x^2 + y^2 + x - y - 6 = 0$ determinare
- l'equazione del fascio di circonferenze generato da \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 ;
 - l'equazione dell'asse radicale del fascio;
 - le coordinate dei punti base;
 - l'equazione della retta dei centri;
 - l'equazione della circonferenza del fascio passante per l'origine;
 - l'equazione della circonferenza che ha il centro sull'asse delle ordinate;
 - le equazioni delle circonferenze del fascio tangenti alla retta di equazione $y = 1$.
3. Trovare l'equazione della retta tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ nel suo punto $T = (-1, -2)$. Trovare poi l'equazione del fascio di circonferenze aventi T come unico punto base e mostrare che tale fascio ammette un unico punto limite. Trovare le circonferenze del fascio aventi raggio di lunghezza $4\sqrt{10}$.
4. Data l'equazione $(k - 1)x^2 + (k - 1)y^2 + 2x - 2y + k - 1 = 0$, essendo k un parametro reale, determinare per quali valori di k :
- essa rappresenta una circonferenza non degenera;
 - si ha la circonferenza di raggio 1;
 - la circonferenza passa per il punto $(0, 0)$

5. Dimostrare che in un fascio di circonferenze la retta dei centri e l'asse radicale sono sempre perpendicolari (consiglio: siano $x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$ le equazioni di due circonferenze di un fascio; trovare l'equazione della retta dei centri e l'equazione dell'asse radicale, confrontare le pendenze).
6. È data la famiglia di circonferenze di equazione:

$$x^2 + y^2 - 6kx - 4k^2y + 13k^2 - 1 = 0$$

al variare del parametro reale k . Questa famiglia non costituisce un fascio, perché non è ottenuta come combinazione lineare di due circonferenze (non si spiegherebbe, infatti, la presenza di un termine k^2). Trovare l'equazione del luogo dei centri della circonferenza e la misura del raggio in funzione di k . Provare a tracciare alcune circonferenze della famiglia. Ha senso chiedersi se esistono punti base?