

## ESERCIZI DI TRIGONOMETRIA

1. Verifica le seguenti identità:

$$(a) \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sin^2 x - 1}{2\cos^2 x - 1}$$

$$(b) 2\sin(\pi - \alpha + \beta) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \beta\right) + \cos\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\alpha \cos\beta$$

$$(c) \sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2} + \frac{2\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$(d) \sin^2\alpha \cos^2\alpha = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\alpha)$$

2. Risolvi le seguenti equazioni goniometriche in  $\mathbb{R}$ :

$$(a) \sin\left(\frac{2}{3}\pi - 2x\right) + \cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$(b) 2\sin^2\frac{x}{2} + \cos x = 3\tan^2 x$$

$$(c) 4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\sin x \cos x + \sqrt{3} = 0 \text{ (dividere a destra e a sinistra per } \cos x)$$

$$(d) 2\sqrt{3}\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 3\cos^2 x - \sqrt{3} = 0 \text{ (moltiplicare } \sqrt{3} \text{ per } \sin^2 x + \cos^2 x)$$

3. Risolvi le seguenti disequazioni goniometriche:

$$(a) \sin x - (\sqrt{2} - 1)\cos x \leq 0$$

$$(b) \sin x(2\sin x - 1)(2\cos x + 1) > 0$$

$$(c) \frac{\sin x}{1 + \cos x} > 2 + \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2\sin x + \cos x}{(1 + \cos x)\sin x}$$

$$(d) \sqrt{4\sin^2 x - 3} < 1 + \sin 2x$$

4. Considera una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$  e una sua corda  $AB$  di lunghezza  $r\sqrt{3}$ . Sul maggiore fra i due archi di circonferenza determinati dai punti  $A$  e  $B$  prendi un arbitrario punto  $C$ , poni  $x = \widehat{ABC}$  e indica con  $\mathcal{P}(ABC)$  il perimetro del triangolo  $ABC$ .

(a) definisci le limitazioni per l'angolo  $x$ ;

(b) determina per quali valori di  $x$  si ha  $\mathcal{P}(ABC) = (3 + \sqrt{3})r$ ;

(c) esprimi in funzione dell'angolo  $x$  la funzione  $f(x) = \frac{\mathcal{P}(ABC)}{r\sqrt{3}}$ , tracciane il grafico e determina, entro le limitazioni geometriche, per quale valore di  $x$  essa assume il suo massimo valore.

5. Sia  $ABC$  un triangolo rettangolo di ipotenusa  $\overline{AB} = 2r$ . Costruisci esternamente al triangolo il quadrato  $ACDE$  avente  $AC$  come lato. Determina l'ampiezza  $x$  dell'angolo  $\widehat{BAC}$  in modo che il perimetro del trapezio  $AEDB$  sia uguale a  $3(\sqrt{3} + 1)r$ .

6. Di un triangolo acutangolo  $ABC$  isoscele sulla base  $AB$  si sa che  $\overline{AB} = 2a\sqrt{6}$  e che  $\sin\widehat{ACB} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

(a) trova la misura della mediana  $AM$  relativa al lato  $BC$ ;

(b) dimostra che i triangoli  $AMB$  e  $AMC$  sono equivalenti;

(c) trova l'ampiezza dell'angolo  $\widehat{AMB}$

7. Una piramide retta ha come base un quadrato  $ABCD$  di lato 12 cm e il volume di  $624\text{cm}^3$ .

(a) trova la superficie totale della piramide;

(b) trova l'ampiezza degli angoli diedri formati dalle facce laterali con la base e dalle facce laterali fra loro;

(c) sia  $V$  l'ulteriore vertice della piramide e sia  $VH$  l'altezza della faccia  $VBC$  relativa alla base  $BC$ . Sia  $M$  il punto medio di  $VH$ . Trovare la distanza  $AM$ .