

## Esercizi relativi al capitolo 2

### 2.1 Funzioni pari e dispari

Stabilire se le seguenti funzioni sono pari, dispari o né pari né dispari.

1.  $f(x) = x^4 - x^2$
2.  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x}$
3.  $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x+x}}$
4.  $f(x) = x^2 \sin x$
5.  $f(x) = 2^{\frac{1}{x^2}}$
6.  $f(x) = |x - 2| + 4$
7.  $f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$
8.  $f(x) = \ln(x^4 - 1)$
9.  $f(x) = e^{|x|+x^2}$
10.  $f(x) = x + \sqrt{|x|}$
11.  $f(x) = \frac{x^2}{\sin x}$
12.  $f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$
13.  $f(x) = x \cos x$
14.  $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$
15.  $f(x) = |\ln x|$
16.  $f(x) = x(\cos x + \sin x)$

### Soluzioni

1.  $f$  è pari
2.  $f$  è dispari
3.  $f$  è pari
4.  $f$  è dispari
5.  $f$  è pari
6.  $f$  non è pari né dispari

7.  $f$  è dispari
8.  $f$  è pari
9.  $f$  è pari
10.  $f$  non è pari né dispari
11.  $f$  è dispari
12.  $f$  è dispari
13.  $f$  è dispari
14.  $f$  è dispari
15.  $f$  non è pari né dispari
16.  $f$  non è né pari né dispari

## 2.2 Funzione composta

1. Date le funzioni  $f(x) = x^3$  e  $g(x) = \sqrt{2x-1}$  determinare  $f \circ g(x)$ ,  $g \circ f(x)$ ,  $f \circ f(x)$ ,  $g \circ g(x)$ .
2. Date le funzioni  $f(x) = 1 - x^2$  e  $g(x) = e^x$  determinare  $f \circ g(x)$ ,  $g \circ f(x)$ ,  $f \circ f(x)$ .
3. Sia  $f(x) = e^x$ . Scrivere l'espressione analitica di  $f(-x)$ ,  $-f(x)$ ,  $f(x-2)$ ,  $f(x)+2$ ,  $|f(x)|$ ,  $f(|x|)$ ,  $|f(|x|)|$ ,  $f(1+|x|)$ ,  $1+f(|x|)$ .
4. Siano  $f(x)$  e  $g(x)$  due funzioni dispari. Stabilire se  $f \circ g(x)$  è pari o dispari.
5. Siano  $f(x)$  una funzione crescente e  $g(x)$  una funzione decrescente. Stabilire se  $f \circ g(x)$  è crescente o decrescente.
6. Sia  $q(x) = 3 + \ln^2(2x-1)$ . Determinare tre funzioni  $f$ ,  $g$  e  $h$  tali che  $q(x) = f \circ g \circ h(x)$ .

### Soluzioni

1.  $f \circ g(x) = (\sqrt{2x-1})^3$ ,  $g \circ f(x) = \sqrt{2x^3-1}$ ,  $f \circ f(x) = x^9$ ,  $g \circ g(x) = \sqrt{2\sqrt{2x-1}-1}$ ;
2.  $f(-x) = e^{-x}$ ,  $-f(x) = -e^x$ ,  $f(x-2) = e^{x-2}$ ,  $f(x)+2 = e^x+2$ ,  $|f(x)| = |e^x|$ ,  $f(|x|) = e^{|x|}$ ,  $|f(|x|)| = |e^{|x|}|$ ,  $f(1+|x|) = e^{1+|x|}$ ,  $1+f(|x|) = 1+e^{|x|}$ ;
3.  $f \circ g(x) = 1 - e^{2x}$ ,  $g \circ f(x) = e^{1-x^2}$ ,  $f \circ f(x) = 1 - (1 - x^2)^2 = 2x^2 - x^4$ ;
4.  $f \circ g(x)$  risulta dispari;

5.  $f \circ g(x)$  risulta decrescente;
6.  $f(x) = 3 + x^2$ ,  $g(x) = \ln x$  e  $h(x) = 2x - 1$ .

### 2.3 Funzioni invertibili

Delle seguenti funzioni determinare, se esiste, la funzione inversa  $f^{-1}$  ed il suo dominio.

1.  $f(x) = 2 - 3x$ ;
2.  $f(x) = x^2 - 2x$ ;
3.  $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ;
4.  $f(x) = \sqrt{2x^2 + 5}$
5.  $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ ;
6.  $f(x) = \frac{x}{x+3}$ ;
7.  $f(x) = e^{1-2x}$ ;
8.  $f(x) = 3^{x^2}$ ;
9.  $f(x) = \ln(x+4)$ ;
10.  $f(x) = \frac{4}{5^{3x}}$ ;

#### Soluzioni

1.  $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{3}$ ,  $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = \mathbb{R}$ ;
2.  $f$  non è invertibile;
3.  $f^{-1}(x) = x^3 + 1$ ,  $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = \mathbb{R}$ ;
4.  $f$  non è invertibile;
5.  $f^{-1}(x) = \frac{2}{x^3}$ ,  $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
6.  $f^{-1}(x) = \frac{3x}{1-x}$ ,  $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;
7.  $f^{-1}(x) = \frac{1-\ln x}{2}$ ,  $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = (0, +\infty)$ ;
8.  $f$  non è invertibile;
9.  $f^{-1}(x) = e^x - 4$ ,  $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = \mathbb{R}$ ;
10.  $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3} \log_5 4y$ ,  $D_{f^{-1}} = \text{Im } f = (0, +\infty)$ .

## 2.4 Funzioni iniettive, suriettive e monotone

Dopo avere rappresentato graficamente le seguenti funzioni, stabilire se esse sono monotone, iniettive e suriettive (sull'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali). Determinarne inoltre l'insieme immagine ( $\text{Im } f$ ).

1.  $f(x) = 1 + |x - 2|$ ;

2.  $f(x) = \begin{cases} 1 + 2x & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{2} & x > 2 \end{cases}$ ;

3.  $f(x) = \begin{cases} -x - 3 & x \leq 1 \\ 2x - 4 & x > 1 \end{cases}$ ;

4.  $f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 0 \end{cases}$ ;

5.  $f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & x \leq 1 \\ \ln x & x > 1 \end{cases}$ ;

6.  $f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ 3x + 1 & x > 0 \end{cases}$ ;

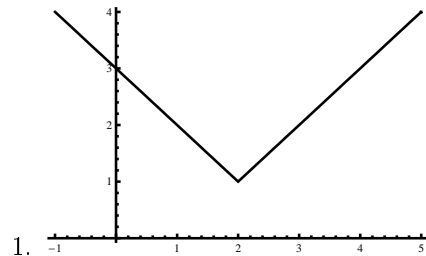
7.  $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x < 0 \\ 1 - x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ ;

8.  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq -1 \\ -x - 2 & x > -1 \end{cases}$ ;

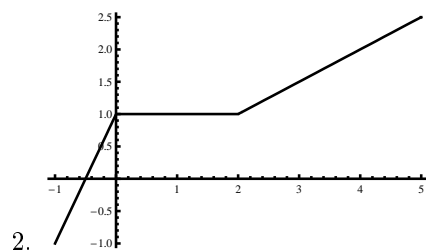
9.  $f(x) = \begin{cases} x & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{|x|} & |x| > 1 \end{cases}$ ;

10.  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \leq 1 \\ x^2 & x > 1 \end{cases}$ ;

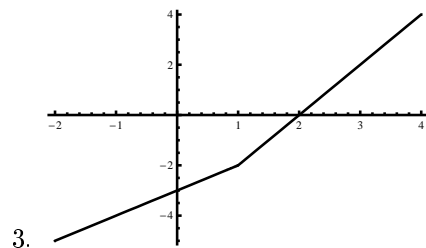
## Soluzioni



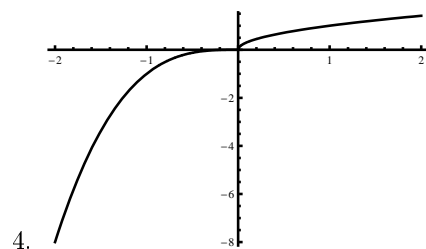
$f$  non è iniettiva, non è suriettiva, né monotona,  $\text{Im } f = [1, +\infty)$ ;



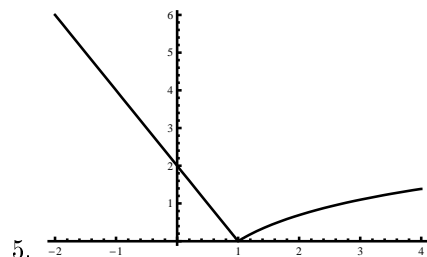
$f$  non è iniettiva, è suriettiva, monotona non decrescente,  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ ;



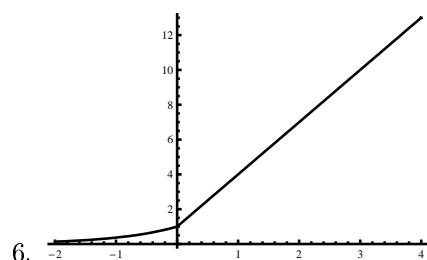
$f$  è iniettiva, suriettiva, monotona crescente,  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ ;



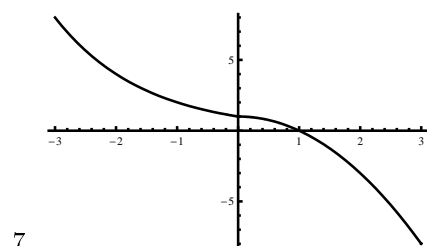
$f$  è iniettiva, suriettiva, monotona crescente,  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ ;



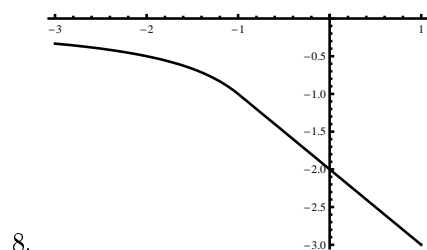
$f$  non è iniettiva, non è suriettiva, né monotona,  $\text{Im } f = [0, +\infty)$ ;



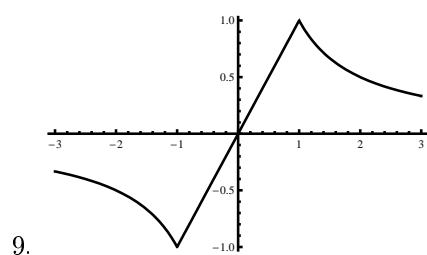
$f$  è iniettiva, non è suriettiva, è monotona crescente,  $\text{Im } f = (0, +\infty)$ ;



$f$  è iniettiva, suriettiva, monotona decrescente,  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ ;

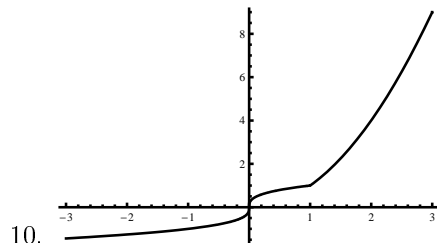


$f$  è iniettiva, non è suriettiva, è monotona decrescente,  $\text{Im } f = (-\infty, 0)$ ;



9.

$f$  non è iniettiva, non è suriettiva, né monotona,  $\text{Im } f = [-1, 1]$ ;



10.  $f$  è iniettiva, suriettiva, monotona crescente,  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ ;

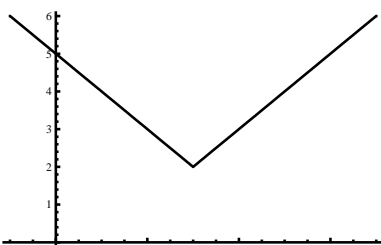
## 2.5 Trasformazioni di funzioni note

Dopo aver rappresentato graficamente le seguenti funzioni si stabilisca se esse risultano inettive, suriettive sull'insieme  $\mathbb{R}$ , invertibili sul loro insieme immagine.

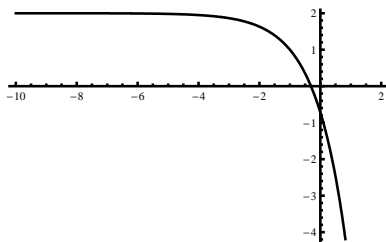
1.  $f(x) = |x - 3| + 2$ ;
2.  $f(x) = 2 - e^{x+1}$ ;
3.  $f(x) = 1 - |x^2 - 1|$ ;
4.  $f(x) = 2^{|x|-1}$ ;
5.  $f(x) = (x + 2)^3$ ;
6.  $f(x) = |\ln(1 - x)|$ ;
7.  $f(x) = \min \{0, 1 - |x|\}$ ;
8.  $f(x) = \max \{e^{-x}, x^3 + 1\}$ ;
9.  $f(x) = \min \{e^x - 1, |x|\}$ ;
10.  $f(x) = 2 - \ln(x + 3)$ ;
11.  $f(x) = \max \{x - x^2, 0\}$ ;
12.  $f(x) = |1 - e^{x+1}|$ ;
13.  $f(x) = \ln(|x| - 2)$ ;
14.  $f(x) = \ln(|x| + 2)$ ;
15.  $f(x) = |2|x| - 4|$
16.  $f(x) = |(x - 3)^3 + 1|$ ;
17.  $f(x) = \max \{2 - \sqrt{|x|}, 3x + 2\}$ ;
18.  $f(x) = \min \{2 - \sqrt{|x|}, 3x + 2\}$ ;

19.  $f(x) = -2 - \frac{1}{3|x|}$ ;

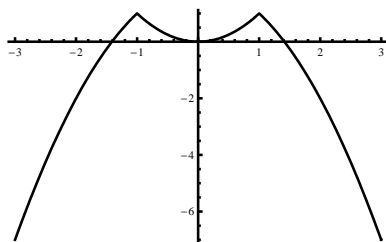
20.  $f(x) = 1 + |\sin x|$ ;

**Soluzioni**

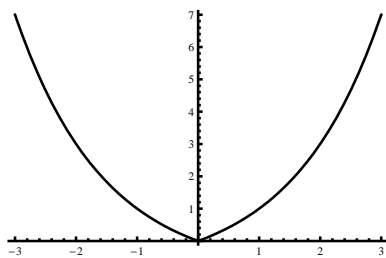
1.  $f$  non è iniettiva quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [2, +\infty)$ ;



2.  $f$  è iniettiva e quindi invertibile su  $\text{Im } f = (-\infty, 2)$ , non è suriettiva;

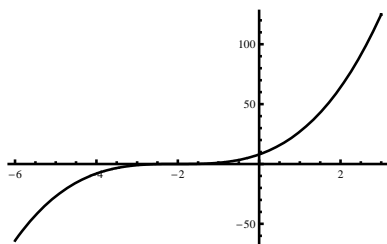


3.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = (-\infty, 1]$ ;

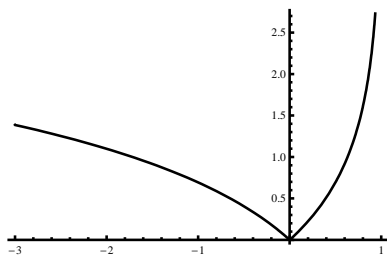


4.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [\frac{1}{2}, +\infty)$ ;

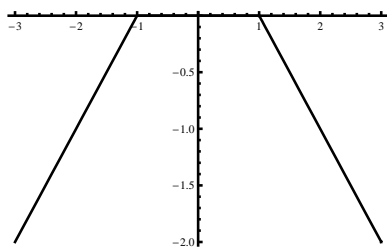




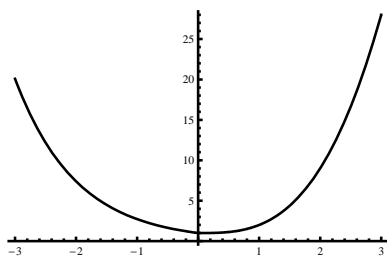
5.  $f$  è iniettiva e invertibile su  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ , è quindi suriettiva;



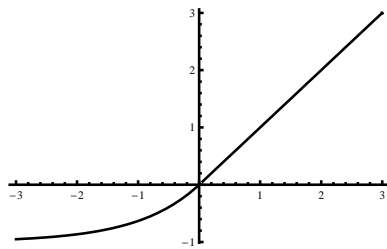
6.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [0, +\infty)$ ;



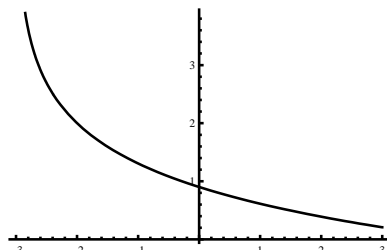
7.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = (-\infty, 0]$ ;



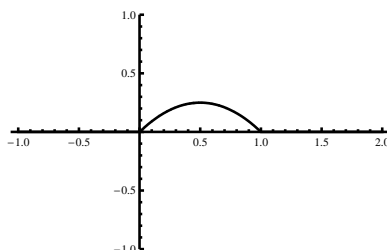
8.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [1, +\infty)$ ;



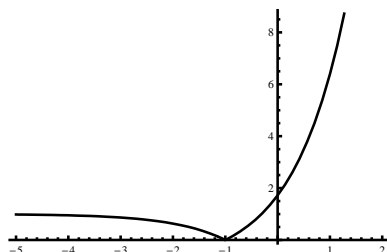
9.  $f$  è iniettiva e quindi invertibile su  $\text{Im } f = (-1, +\infty)$ , non è suriettiva;



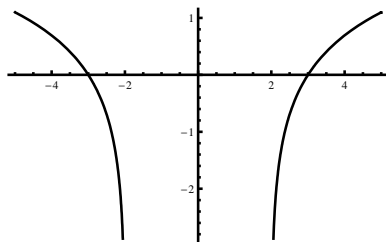
10.  $f$  è iniettiva e invertibile su  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ , è quindi suriettiva;



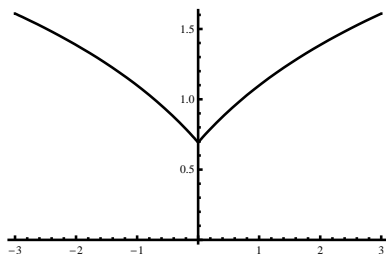
11.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [0, \frac{1}{4}]$ ;



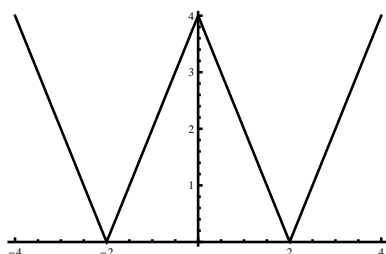
12.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [0, +\infty)$ ;



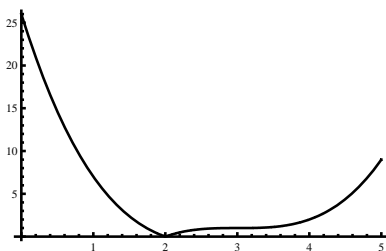
13.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, è suriettiva e  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ ;



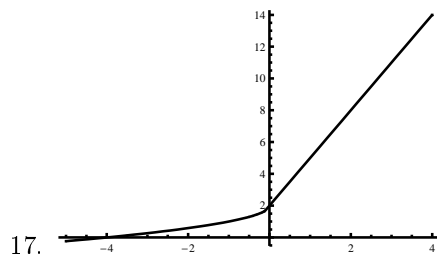
14.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [\ln 2, +\infty)$ ;



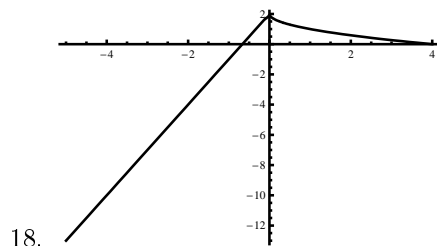
15.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [0, +\infty)$ ;



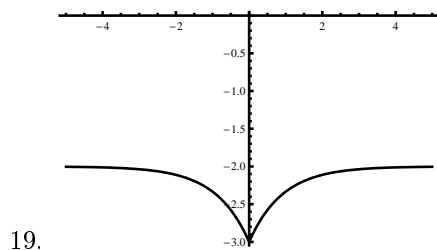
16.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [0, +\infty)$ ;



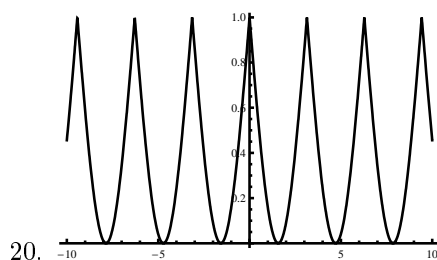
$f$  è iniettiva e invertibile su  $\text{Im } f = \mathbb{R}$ , è quindi suriettiva;



18.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = (-\infty, 2)$ ;



19.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [-3, -2)$ ;



20.  $f$  non è iniettiva e quindi non è invertibile, non è suriettiva e  $\text{Im } f = [1, 2)$ ;

## 2.6 Dominio di una funzione

Si determini il dominio delle seguenti funzioni:

1.  $f(x) = \frac{x}{x^3-1}$ ;

2.  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-5x+6}$ ;
3.  $f(x) = \frac{x^2}{|x+4|}$ ;
4.  $f(x) = \sqrt{3-x^2}$ ;
5.  $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$ ;
6.  $f(x) = \sqrt{1+|x|}$ ;
7.  $f(x) = \sqrt{|x|-2}$ ;
8.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$ ;
9.  $f(x) = e^{\frac{x-1}{2}}$ ;
10.  $f(x) = e^{\sqrt{x-1}}$ ;
11.  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ ;
12.  $f(x) = \frac{3+2x}{e^x-2}$ ;
13.  $f(x) = (x^2+x)e^{\frac{1}{x^2}}$ ;
14.  $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-3}\right)$ ;
15.  $f(x) = \ln|2x-5|$ ;
16.  $f(x) = \frac{\ln x}{2\ln x-1}$ ;
17.  $f(x) = \frac{x^2}{\ln^2 x + \ln x}$ ;
18.  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ ;
19.  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ ;
20.  $f(x) = \frac{1}{\cos x \sin x}$ ;
21.  $f(x) = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$ ;
22.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ;
23.  $f(x) = \ln(x-x^2)$ ;
24.  $f(x) = e^{\sqrt[3]{1-3x}}$ ;
25.  $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{\sqrt{|x|}}$ ;
26.  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ;
27.  $f(x) = \left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)^x$ ;

28.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};$

29.  $f(x) = \ln(x - \sqrt{4 + 3x});$

30.  $f(x) = \sqrt{1 - \sin x};$

31.  $f(x) = \ln(1 - |\cos x|);$

**Soluzioni**

1.  $D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty);$

2.  $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty);$

3.  $D_f = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty);$

4.  $D_f = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}];$

5.  $D_f = \mathbb{R};$

6.  $D_f = \mathbb{R};$

7.  $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty);$

8.  $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty);$

9.  $D_f = \mathbb{R};$

10.  $D_f = [1, +\infty);$

11.  $D_f = \mathbb{R};$

12.  $D_f = (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 2, +\infty);$

13.  $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty);$

14.  $D_f = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty);$

15.  $D_f = (-\infty, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, +\infty);$

16.  $D_f = (-\infty, \sqrt{e}) \cup (\sqrt{e}, +\infty);$

17.  $D_f = (-\infty, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, 1) \cup (1, +\infty);$

18.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi);$

19.  $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}];$

20.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}];$

21.  $D_f = \mathbb{R};$

22.  $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ;
23.  $D_f = (0, 1)$ ;
24.  $D_f = \mathbb{R}$ ;
25.  $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 2)$ ;
26.  $D_f = (1, +\infty)$ ;
27.  $D_f = (-1, 0) \cup (0, 1)$ ;
28.  $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ;
29.  $D_f = (4, +\infty)$ ;
30.  $D_f = \mathbb{R}$ ;
31.  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$ ;

Date le funzioni  $f(x) = \sqrt{x} - 1$ ,  $g(x) = \sin x$ ,  $h(x) = \ln x$  e  $z(x) = e^{x+1}$ .  
Determinare il dominio delle seguenti funzioni:

1.  $\frac{h(x)}{f(x)}$ ;
2.  $\frac{z(x)}{h(x)}$ ;
3.  $z \circ f(x)$ ;
4.  $f \circ z(x)$ ;
5.  $h \circ f(x)$ ;
6.  $f \circ h(x)$ ;
7.  $f \circ g(x)$ ;

### Soluzioni

1.  $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ;
2.  $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ;
3.  $D_f = [0, +\infty)$ ;
4.  $D_f = \mathbb{R}$ ;
5.  $D_f = (1, +\infty)$ ;
6.  $D_f = [1, +\infty)$ ;
7.  $D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$ ;