ESERCIZI DI MATEMATICA

1. Dato il triangolo di vertici O, A e B:

   (a) dimostrare che esso è rettangolo in B;

   (b) se M è il punto medio del lato OA, scrivere le equazioni della simmetria σ di centro M e trovare le coordinate del punto B' simmetrico di B rispetto a M;

   (c) che tipo di quadrilatero è $OB'AB$? qual è la sua area?

   (d) trovare le equazioni della traslazione t che trasforma il segmento OB nel segmento $B'A$;

   (e) trovare l'equazione della retta passante per B' e per A.

2. Trovare l'equazione della circonferenza centrata nell'origine e tangente alla retta di equazione $2x+y-5=0$.

3. Scrivere l'equazione della circonferenza tangente alla retta di equazione $2x+y-1=0$ in $A=(-1,3)$ e passante per $B=(-1,2)$.

4. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

   (a) $\frac{3+x}{2} \geq \sqrt{2x^2-x+3}$

   (b) $2-\sqrt{x^2+1} > x+1$

   (c) $x-4 > -2+\sqrt{8x-7-2x^2}$

5. Disegnare i sottoinsiemi del piano cartesiano descritti dalle seguenti relazioni:

   (a) $3x+2y-1<0$

   (b) $|x-y| \geq 1$

   (c) $-1 \leq y \leq 2$

   (d) $\begin{cases} y \geq x-2 \\ y < 3-x^2 \end{cases}$

6. Scrivere l'equazione della circonferenza avente per tangente nell'origine la bisettrice del 2° e 4° quadrante e tangente alla retta di equazione $x=2y-5$.

7. Data la parabola di equazione $y=ax^2$, dimostrare che le tangenti ad essa mandate da un qualsiasi punto della direttrice sono fra loro perpendicolari.

8. Dati i punti $A=(2,\frac{3}{2})$, $B=(-1,0)$ e la retta s di equazione $x+y-4=0$, scrivere l'equazione della circonferenza $\mathscr{C}$ passante per A e B ed avente centro sulla retta s.

   (a) scrivere le equazioni della rotazione ρ di centro il punto $D=(-2,3)$ e angolo $-30°$;

   (b) scrivere l'equazione della trasformata della circonferenza $\mathscr{C}$ mediante la rotazione ρ;

   (c) trovare l'equazione delle tangenti comuni alle due circonferenze;

9. Data l'ellisse di equazione $x^2+y^2-9=0$ determinare, sull'arco di curva di coordinate positive, un punto P in modo che, indicato con A il suo vertice di ascissa positiva e con B quello di ordinata positiva, il triangolo PAB sia isoscele. Trovare la misura degli angoli del triangolo, la lunghezza del perimetro e l'area.

10. E' data l'iperbole di equazione $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Sia A un suo punto e sia t la tangente all'iperbole in A. Dimostrare che il triangolo formato da t e dai due asintoti ha la stessa area, qualsiasi sia il punto A scelto.

11. In una semicirconferenza è inscritto un triangolo rettangolo ABC di base $\overline{AB}=2$. Si tracci la semiretta parallela alla base AB passante per C e che non interseca la circonferenza. Sia D il punto su tale semiretta per cui è $\overline{CD}=\overline{AC}$. Si ponga $B\hat{A}C=x$.

    (a) quali sono i valori fra cui può variare l'angolo x?

    (b) esprimere in funzione di x la differenza fra le aree dei triangoli ABC e BCD.

(c) posto che il risultato trovato al punto precedente è $f(x) = \sin 2x \cdot (1 - \cos x)$, prescindendo dalle limitazioni geometriche poste in precedenza, studiare il segno di $f(x)$.

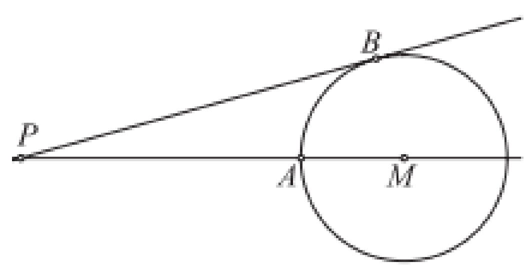
12. E' dato il triangolo AOB, rettangolo in O, del quale si sa che l'altezza relativa all'ipotenusa ha lunghezza 1. Detta x l'ampiezza dell'angolo $O\hat{A}B$, si esprima in funzione di x il perimetro $p(x)$ del triangolo. Successivamente, prescindendo dal significato geometrico della funzione p , e quindi non considerando le limitazioni poste alla x, si studi il segno della funzione p.

13. Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che: $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$. Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE. Dimostrare che l'area del quadrilatero $DENM$ è la quarta parte dell'area del triangolo ABC.

14. Un trapezio isoscele ha le diagonali perpendicolari ai lati obliqui e la base maggiore che misura 1. Determinare la misura degli angoli adiacenti alla base maggiore in modo che la somma della base minore e del lato obliquo misuri k, essendo k un numero reale positivo.

15. In una circonferenza di raggio r si consideri la corda AB che dista $\frac{r}{2}$ dal centro. Si prenda sul maggiore degli archi $\overset{\frown}{AB}$ un punto C e si prolunghi AC di un segmento CD tale che $\overline{CD} = \overline{AC}$. Posto $CAB = x$, si determini la funzione $\mathscr{A}(x)$ che esprime l'area del triangolo BCD in funzione di x. Prescindendo dalle limitazioni geometriche alla x, si stabilisca per quali valori di r $\mathscr{A}(x) > 0$

16. Osserva la seguente figura:



A e B sono due punti della circonferenza di centro M, la retta per P e B è tangente alla circonferenza in B. I segmenti PA e MB hanno lunghezza intera e la differenza tra la lunghezza di PB e quella di PA è 6. Quanti sono i possibili valori per la lunghezza del segmento MB?